5

ALEXANDRI ANDERSONI

ΑΙΤΙΟΛΟΓΙΑ.

PRO ZETETICO APOLLONIANI problematis a se iam pridem edito in supplemento Apollonij Rediuiui.

Ad Clarissimum & ornatissimum virum MARINUM GHETALDUM Patritium Ragusinum.

In quâ

AD EA QUAE OBITER INIBI PERSTRINXIT GHETALDUS *Respondetur, & Analytices vsus clarius detegitur.*



PARISIIS,
Apud OLIVERIUM DE VARENNES via Iacobæa sub signo Lilij.

Anno, M. DC. XV.



ALEXANDRI ANDERSONI.

ΑΙΤΙΟΛΟΓΙΑ.

AD CLARISSIMVM ET ORnatissimum virum Marinum Ghetaldum patritium Ragusinum.

PRISCI & eruditi sæculi viris, fœlicem adeò καὶ λεπτὴν τῆς ἐπιγνώσεως κατα-λῆψιν. largitus est naturæ genius, vt nobis opus & labor omnis sit, viam ab ijs vulgo tritam, quam acutissima mentis acie intentissimè peruestigare: & si quis hodie, quæ per tot sęculorum lapsus, supersunt illorum monumenta, vel clarius interpretetur, non exiguam meretur laudem: qui vero vetustate vel penitus deleta, vel parte aliquâ mutila aut deprauata, restituerit aut redintegrarit, iure venerandæ illius stirpis quasi sacrum germen miramur, inter hos tu (vir clarissimè) quem in restituendis ma-

gni Apollonij inclinationibus, facer hic afflauit genius, quas non multos ab hinc annos inchoatas, jam tandem fœliciter abſoluiſti, & quoniam grauioribus pro republica veſtra negotijs, prius impeditus, quod ſupererat operis, poſt editam priorem partem, iam apud te effectum, ſed non prorſus, vel expolitum vel abſolutum, otioſioribus interim tentandum reliquiſti, ego analyticâ meâ methodo illud aggreſſus, (illibatam tibi linquens tuam Syntheticam.) omnium caſuum Zeteſim Inij, eóque munere perfunctus, rationem docui ex primo meo lemmate quâ quæſitum ex datis eruatur, ídque eo fini, (quod & inibi annotaui) vt vel hoc exemplo diſcant ſtudioſi, & ſciant, vnam analyticen velut ταμεῖον eſſe, vnde leui, ac facili opera quicquid proponitur ſtatim depromi ac ſciri poſſit, id quidem vel hoc ſolum nomine à me præſtitum gaudeo, quod & amorem erga me tuum conciliarit, & iudicij tui cenſuram ſubierit, etiam non ſine notâ: illum quidem vt plenis vlnis amplector, & animo grato (à tanto quippe viro) foueò, ita hâc exuere me quæſo liceat donec coram vel te iudice cauſa dicatur, nam quum aliorum tum mea potiſſimum intereſt, vt artis huius ingenioſiſſimæ ampliſſimus vſus, & paratiſſima opera clarius pateſcat.

Ac primum, quod planum per adſcenſum pro ſolido ſuppoſuiſſe ais, vt ambignum explicemus, aliud eſſe non poteſt planum per adſcenſum niſi ve ſolidum, vel aliquid in rationis ſcalâ pro gradus altitudine ſuperius, quod enim vnius in alterum, vel

ſeipſum

ſeipſum ductu, quoquò modò adſcendit, vel alij applicatum, deſcendit in ſcala, tranſit de genere in genus. Proponatur B in A quadratum vel B quadratũ in A ſimpliciter, ſiue quocumque modo adfectum, adiunctione multâve homogeneorum ſubdatâ longitudine in poteſtatem rationis duplæ, vel ſub dato plano in latus, terminum ſcilicet rationis ſimplæ, æquari Z cubo: Geometræ certe inſolens appellatio fuerit, ſolida hęc non eſſe, ſed plana aut longitudines per adſcenſum. at ſi ſuos adſcribat epilogiſta datis magnitudinibus valores, & ſit, B. 2. Z. 3. ita vt epilogiſticâ phraſi, 2. Q. vel 4. N. vel coniunctim, 2. Q. plus 4. N. equentur 27. concedatur quidem illi ſua loquendi libertas, dicátque ſi libet, 4. N. Longitudinem eſſe per adſcenſum, 2. Q. planum eſſe per adſcenſum, multiplicationem ſcilicet, quæ nihil eſt aliud quam eiuſdem quantitatis ad ſeipſam additio multipla pro ratione data, & proinde quod ex ſingularium collectione oritur, ipſis ſingulis quæ adduntur homogeneum eſt: at in continuis, quod fit ductu longitudinis in planum, vel plani in longitudinẽ, ſolidum dicet Geometra: ſed quo vſus ſum paraboliſmo ad plaua deſcendunt? equidem: interdum etiam ad longitudines, nam B, quadratũ in A applicatum B quadrato, Z cubus applicatus B quadrato, longitudines ſunt, & hic paraboliſmus paraſceue ea eſt, quam ego ad exegeticem in Geometricis adhibui: nec ignoro (docente Pappo) locos ſolidos, & ſolida problemata veteribus dicta, quorum explicatio pendebat ex trium ſectionum co-

nicarum alicuius præter circulum deſcriptione. At ego æquationes illas ſolidas dixi, quia earum termimini ſunt ſolida in notis ὁμοιομερῶς, ac proinde ad analogiſmum accommodatiores quam, quum integris admiſcentur fractiones Geometricæ, & per expoſitum paraboliſmum fiunt Geometriæ legibus (vti docui) obnoxij. ſi quis pro ſolidis vti velit eorum parabolis, & ad plana vel etiam longitudines terminos primum exhibitos deprimere, per me liceat, nullus tamen Geometra inde inferat B in A quadratum, B quadratum in A, vel Z ſolidum, inter quæ primò ſubſiſtit æquatio, ſolida non eſſe. Nullis igitur ego luſi pręſtigiis, ſed quâ potui vſitatis ſingula nominibus enunciaui. quâm autem in hoc luto hęſitarint veteres analyſtę, teſtentur ipſorum ſcripta; & Regiomontanus nobilis ſui ſæculi Mathematicus in libris de triangulis, quum alibi, tum prop. 12. li. 2. æquationem inter 16 Q -- 680 N & 2000. Geometricè examinare neſcire ſe profitetur.

Illas verò huius gradus ęquationes, in quibus magnitudo omnino data æquatur homogenæ prorſus ignotę, ſiue puras, ſiue adfectas, vt prius ita & nunc (niſi conceſſis quibuſdam quę Geometria hactenus negauit.) ad mechanicem geometricam ἐπιστημονικῶς reducere, ingenuè neſcire me profiteor, quæ autem poſtulentur vt in huiuſmodi ęquationibus quæſitum ſciatur, ex analyticâ hac noſtrâ methodo ſic clarum fiet.

Ponatur A cubus æqualis ſolido facto ex B quadrato in D, ſi inter B & D ninenientur duæ continuè

proportionales, ſecundam a B eſſe ipſam A de qua quæritur, nemo eſt modo hanc artem vel à limine ſalutarit, qui neſciat.

Sit autem A cubus, plus B in A quadratum, æqualis ſolido dato, quod ſi cubus non eſt, eò tandem (vti iam dictum eſt) reuocetur, ſitque D cubus, ſtatim apparet huius æquationis mechanicem pendere, ex hoc problemate.

Ex ſerie quatuor continuè proportionalium, datâ ſecundâ, & rectâ æquali differentiæ inter primam minorem et quartam, inuenire proportionales.

Eritque harum prima ipſa A de qua quæritur, D ſecunda illi proxima, & B differentia inter primam & quartam.

At A cubus minus B in A quadratum æquetur D cubo, proponetur.

Ex ſerie quatuor continuè proportionalium, datâ ſecundâ, et differentia inter primam minorem & quartam, inuenire proportionales.

Eritque A prima maior, B differentia inter quartam minorem & primam maiorem, & D ſecunda.

Tertiò B in A quadratum minus A cubo, æquetur D cubo: proponetur.

Ex ſerie quatuor continuè proportionalium, datâ ſecundâ, et aggregato primæ & quartæ, inuenire proportionales.

Eritque harum prima A maior minorve, ſecunda D, aggregatum primæ & quartæ B. quæ ipſorum ſolidorum ſtructuram conſideranti clara ſunt.

Quartò A cubus, plus B quadrato in A æquetur D cubo, ex hac æquatione ſtatim quidem offeruntur è

quatuor continuè proportionalibus secunda D, tum B, media proportionalis inter primam & differentiam primę & quartæ, siue rectangulum ex prima in differentiam primæ & quartæ.; At ex facto (vt superius dictum est) parabolismo, coefficienti dato, nimirum ipsi B quadrato reliquis applicatis solidis, id est si fiat vt B quadratum ad D quadratum, ita D ad C. erit C æqualis ipsi A, & præterea altitudini ortæ ex applicatione ipsius A cubi, ad B quadratum, si igitur data C, ita diuidatur, vt cubus vnius segmenti, æqualis fiat solido quod fit sub altero, & dato B, quadrato, erit latus cubi magnitudo quæsita, hoc autem est.

Ex serie quatuor continuè proportionalium, data prima et aggregato secunndæ et quartæ, inuenire proportionales.

Eritque harum, B prima, C aggregatum secundæ & quartæ, A vero secunda; quinto sit A cubus minus B quadrato in A, æqualis D cubo, & hic offertur secunda data D, cum B media proportionali inter primam & differentiam primæ, & quartæ, at verò si D cubus ipsi B quadrato applicetur, hoc est, si fiat vt B quadratum ad D quadratum, ita D ad C, & eidem intelligatur applicari & A cubus, erit C æqualis parabolæ ortæ ex applicatione ipsius A cubi ad B quadratum, minus ipsa A longitudine, quare,

Ex serie quatuor continuè proportionalium, data prima minore, & differentia secundæ et quartæ inueniantur proportionales.

Eritque data B prima minor, C differentia secundæ, & quartæ maioris, & A secunda quæsita.

Denique

Denique B quadratum in A minus A cubo, æquetur D cubo. Hic etiam statim offeruntur secunda D, tum, B, media proportionalis inter primam A, & aggregatũ primæ & quartæ, applicetur autẽ D cubus ipsi B quadrato, quodque inde oritur sit C, & eidẽ intelligatur applicari & A cubus, erit altitudo C, æqualis ipsi A minus altitudine quæ oritur, si applicetur & A cubus, eidem B quadrato, vnde quæretur.

Ex serie quatuor continuè proportionalium, data prima majore, et differentia inter secundam et quartam inuenire proportionales.

Eritque data B prima maior, C differentia secundæ maioris & quartæ, & A ipsa secunda de qua quæritur.

Atque hactenus peculiaris mihi methodus, in æquationibus cubicis, puris, siue vt libet adfectis; in quibus quum exactio Geometrica nondum sit exhibita, aut inuenta, quidni veteres illos Platonem Eratosthenem, Nicomedem, Archimedem, Heronem, Pappum aliosque, in similibus ad hoc negotium ἐπιχειρήμασι, imitari interim liceat, si quid istis tu melius aut subtilius nouisti.

----- *Clara meæ præpandas lumina menti*
R*es quibus occultas penitus conuisere possim.*

Alterâ in libellum meum notâ, ais:

‘ Pro determinatione problematis in casibus om‘nibus difficilioribus determinationem post analy‘sin me substituisse, vt arduam maximæ & minimæ ‘inuentionem euitarem, quamuis sine ipsa inuentio‘ne problema determinari non possit.

C

Omnes hi casus difficiliores duo sunt, siquidem in triginta ferè hoc bis à me factum, paginis scilicet decima nona & vicesima quarta mei libelli, quos omnes pari facilitate statim obuios mihi dedit mea analytica, nam secundum conditiones singulis addictas instituta zetesi vltrô sese obtulerunt æquationes. sed instituti mei rationem cape: analitycem studiosis isthic commendare volui, idque hoc exemplo, quod tu intactum alijs excolendum reliqueras: & hoc solum monui præfatione ad Matheseos studiosos: ac proinde Zeteticem tantum exercens, ordinato in singulis casibus analogismo, meo munere perfunctus mihi visum sum. neque enim mihi animus, tam inclinationes Apollonianas à te inchoatas supplere, quàm facilem hanc, in re Mathematica veritatis inquirendę viam, studiosis pręire, alioqui alia methodo maius opus moliendum, quod quidem Apollonius maximus & sagacissimus Geometra, nõ nisi quadraginta quinque problematis absoluit, referente Pappo ad propositionem 95. lib. 7. collectionum mathematicarum. in ijs verò duobus casibus determinationes post analysin substitui, quia ex eorum κατασκευῇ non offerebantur maxima & minima, quemadmodum in aliis, in quibus sola opus erat declaratione, esse lineas iam exhibitas, maximas, vel minimas: hic autem quærendæ, & ex firmata vi zeteseos æquatione, eruendæ: neque enim æquationum solũ geneses, sed & symptomata quoque omnia analystæ perito, ars nostra exhibet: singulæ enim æquationes suas sibi inclusas continent determinationes,

δυνάτου καὶ ἀδυνάτου τεκμήρια, easque mihi zetesin tantum obueuẽti, ex æquationibus ostendisse sufficiebat: quas quidem ποριστικῶς recolendo, analysta determinationes statim habet obuias: idque vel his ipsis quæ tu obiter perstringis, sic palam facio.

Repetatur figura paginæ decimæ nonæ mei libelli, & sint duo semi circuli in directum bases habentes, quales in illo casu requiruntur, A E B, C F K D, & sint æquales B C, D H, reliquaque perficiãtur vt illic præceptum est, sitque vt nos ibidem conclusimus, differẽtia B H in E F, & A H in B F, ad A B in B D, vt B C ad B F.

Huic conclusioni subnexa est determinatio his verbis.

Hinc omnibus ipsi A H applicatis, oportet latitudinem ortam ex applicatione B H in E f, non minorem esse duplâ eius quæ potest rectangulum ex latitudine orta ex applicatione A B in B D in rectam B C. tum altera extremarum (diuisa nempe priori latitudine ita vt dicta recta, inter eius partes media sit proportionalis) maiore quidem quam B C, at minore quam est tangens à puncto B inter B punctum contingentiæ, in circumferentia C K D, sublata ex recta data M. reliquum segmentum minus esse debet recta A B, at maius segmento dictæ tangentis inter B *pun-*

ctum, & cauam semicirculi A E B peripheriam, alioqui dicta recta intercipi non potest, vt ex demonstratis patet.

Hinc omnibus ipsi A H applicatis.

Fit hæc applicatio tribus datis rectis, inueniendo quartam proportionalem: fiat igitur primum, vt A H ad B H, ita E F ad aliam, quæ sit N F, eritque N F, latitudo orta ex applicatione B H in E F, fiat deinde vt A H ad A B, ita B D, ad aliam, quæ sit B L. estque hæc latitudo orta ex applicatione A B in B D. Iam ex primo meo lemmate erunt rectangula N B F; & L B C, æqualia & καθόλου quacunque alia sic interceptâ, sectaque pro ratione A H ad B H, ex eadem zetesi, rectangula sub segmentis ad B punctum, rectangulo L B C, æqualia erunt, si igitur inter L B, B C, media inueniatur proportionalis, O, erit O quadratum, rectangulo N B F, æquale.

Oportet latitudinem ortam ex applicatione B H, in E F.

Latitudo orta ex applicatione B H in E F, est ipsa N F, at ea quæ oritur ex applicatione A B in B D, est B L, (vt ostensum est) rectangulum autem sub B L, B C, constitutum est æquale quadrato ipsius O. aio rectam N F, non minorem esse debere, duplà ipsius O: rectangula si quidem omnia, sub interceptarum segmentis ad B punctum, quum similiter sectæ sunt, pro ratione A H ad B H, & multatæ segmentis similibus ipsi A B, æqualia sunt sigillatim rectangulo L B C, id est quadrato O: minimæ verò coefficientes rectangulorum æqualium, sunt latera æquale quadratum comprehendentia, non potest igitur segmétum cuiusuis interceptæ ipsi N F simile, minus esse du-

duplo ipsius O rectæ. vnde sequitur, si fiat vt H B ad H A ita dupla ipsius O ad aliam, quæ sit P, esse P, interceptarum omnium minimam. vt post clarius ostendetur.

Tum altera extremarum, diuisa nempe priori latitudine.

Prior latitudo erat ipsa N F, quæ ita secanda est ex prædemonstratis, vt recta O, potens rectangulum L B C, inter eius partes media sit proportionalis, sint hæ partes N B, B F, altera extremarum (si nimirum recta intercipienda, ipsis datis C A, aut tangenti cõtinnatæ non congruat, quod si congruit factũ quod iubetur) maiore quidem quam B C, at minore quã est tangens à puncto B, inter B, & punctum contingentiæ in circumferentia C K D, (est namque horum segmentorum tangens maximũ, B C minimũ) sublatâ ex recta data intercipienda, reliquum segmentum (rectæ scilicet intercipiendæ) minus esse debet recta A B, (alioqui in circulo A E B intercipi non posset, siquidem A B maxima est interceptarum in semicirculo A E B) at maius segmento dictæ tangentis inter B punctum, & cauam semicirculi A E B peripheriam: rectæ enim inter punctum B, & cauam semicirculi A E B peripheriam interceptæ, quô ipsi A B propiores eo maiores remotissima vero ab ipsa A B, quæ inter datos semicirculos intercipi possit, est ipsa tangens continuata, quare reliquum datæ segmentum, dicto tangentis segmento, minus esse non potest.

Iam diducto velo, & zeteseos involucris explicita determinatione, quid pronũciās: determinasse ne

me hunc casum? Equidem apertè satis zeteseos vim intelligenti, quæ dum ad certam nos adstringit factionem, ipsum problema determinat, demonstratque possibile & impossibile, Imo exhibet ipsam minimam, quâ datâ, statim se prodit maxima, ab ea quippe vtrauis remotissima, quod vt ostendamus πυσιῶν agere liceat, & symptomata acuratius considerare.

Est primum O recta semper minor rectâ à puncto B circulum C F D tangente, quoniam B L, minor est ipsa B D, ex constructione, & propterea rectangulum B D C, id est quadratum tangentis, maius rectangulo L B C, id est quadrato ipsius O, sit autem B L maior ipsa B C, & erit quoque O eadem maior, potest ergo inter punctum B, & circumferentiam C F D, intercipi recta ipsi O æqualis: sit ea verbi gratia ipsa F B, quæ producatur donec circumferentiam A E B, secet in E, & fiat vt A H ad B H, ita E F ad N F, erit igitur (vt demonstratum est.) F B N rectangulum, quadrato O, id est F B, æquale, rectæ igitur F B, B N æquales erunt. Intercipiatur iam quæuis alia, vt Q R, & fiat vt A H ad B H, ita Q R ad S Q: erit igitur Q B vel maior ipsâ F B, si nimirum inter F B & tangentem cadat vel minor, si inter F B, & B C. sit primum B Q maior quam B F: sunt ex habita hactenus zetesi, rectangula N B F id est quadratum B F, & S B Q, æqualia, quoniam igitur triũ proportionaliũ B Q, B F, B S, B Q maior est media B F, erit sũma extremarũ Q S, maior mediæ dupla, id est ipsa F N, est autem ex constructione Q S ad S R, vt F N

ad N E, & permutando Q S ad F N, vt S R ad N E, atqui Q S ostensa est maior ipsa FN, ergo & S R ipsa NE, & tota QR tota FE maior erit: eodéque modo si interponatur CB minor ipsa C F, & fiat vt A H ad BH ita A C ad MC, ostendetur composita ex extremis M C, maior mediæ dupla, id est ipsa N F, totaque C A, tota FE maior.

Sit iam BL, ac proinde & O non maior ipsa BC: vel igitur æqualis, vel minor, si fuerit BL æqualis ipsi BC, erit O eidem æqualis, & tum ostendetur modô quô supra, ipsa C A minima. sin minor, tum positâ O rectâ media, erit B C maior extremarum, & B L minor, ac proinde quoque in reliquis rectangulis æqualibus, qualia sunt Q B F, F B N, erunt B F, B Q maiores extremæ, & quoniam ex quatuor proportionalibus C B M, Q B S, maxima est Q B, erit minima B S, totaque Q S, tota C M maior erit, (ex 25. 5. Euclid.) eodemque modo ostendetur & Q R maior quam C A vel F E, atque adeo à minore semper remotiorem, propinquiore maiorem esse, & si quidem C A fuerit minima, erit tangens a puncto B maxima at F E existente minima, erunt interceptarum segmenta omnia à puncto B versus tangentem continuo maiores, ac proinde & ipsa tangens omnium maxima, eique coëfficiens reliquarum coëfficientium minima: composita verò ex tangente & sibi coëfficiente, maxima ab illa parte, ac proinde tangens continuata, interceptarum ab hac parte maxima. at vero posita eâdem O media ęquali ipsi B F erunt interceptarum segmenta a B puncto versus BC

continuo minores extremæ, ac proinde B C minima, quare & ei coëfficiēs adeoque & composita ex ijsdem maior quam composita ex alijs coëfficiētibus ad hasce mediæ partes, totaque C A maxima erit. hinc etiā sequitur si proportionales fuerint B C, B F, B Q æquales esse Q R, C A, rectangula quippe C B M, Q B S, æqualia, sub æqualibus erunt lateribus, atque adeo proportionalibus existentibus C B, B F & tangente à puncto B, erit vtraque C A, & tangens (vt dictum est) continuata, maxima. at B C maiore existente tertia proportionali ipsis, tangenti à puncto B, & B F rectis, erit dicta tangens maxima, quippe tertia ei proportionali minima existente, ac proinde & ipsa tangente maxima. at eadem B C minore existente eadem tertia proportionali, erit C A interceptarum maxima, quippe B C, proportionalium minimâ ac propterea eius coëfficiente maximâ.

Ex prædemonstratis patet, quomodo duob⁹ oblatis huiusmodi semi circulis, facile sit maximū & minimū determinare, facili ab analysi ad synthesin regressu: adeoque ζητητὴν & Geometram se prębere analystam: nam postquam τὸ ὅλον ad demonstrationem suam firmandam demonstrarit & sumpserit, (quēadmodum a nobis præmissum est) rectangula omnia Q B S, F B M, C M A quadrato O siue rectangulo L B C esse æqualia, sic statim minimam concludet: si quidem B L non minor fuerit ipsa B C, erit A C omnium minima, ac proinde ab ea remotissima, ipsa scilicet tangens maxima, vt ostensum à nobis est, et B L maiore existente ipsa B G, fiat rectangulo L B C, æquale

æquale quadratum O, quæ quidem O, ſemper minor eſt tangente à B puncto, vt demonſtratum eſt. & in hoc caſu maior ipſa B C, fiatque vt H B ad H A ita O dupla ad P. dico P eſſe minimam interceptarum. intercipi enim poſſe ſic oſtenditur, fiat B F ipſi O æqualis, & producatur donec ſecet circumferentiam A E B, in E, & fiat vt A H ad B H, ita E F ad N F, & erit ex demonſtratis N B F rectangulum, ęquale quadrato ipſius B F, ergo rectæ N B, B F æquales, eſt autem N F ad F E, ex conſtructione vt H B ad H A, atqui vt H B ad HA ita N F ſiue O dupla ad P, ſunt igitur F E & P rectæ, æquales: intercepta itaque eſt FE recta ipſi P æqualis. eſſe autẽ minimã, demõſtrabitur vt ſupra: itẽ verũ data A C, an ipſa tangens per B pũctum continuata, maxima ſit, an vtraque, vt iam oſtenſum eſt. Itemque ſi offeratur alia, maximâ interceptarum minor, minore maior, problemati hoc modo ſatisfiet. ſit ea T X recta, & fiat vt A B ad B H, ita T V ad V X, deinde fiat rectangulo L B C, ſiue O quadrato æquale rectangulum X Z V, & quoniam recta T X maior eſt minima, erit altera extremarum V Z vel Z X maior ipſa O, altera minor, deinde quoniã eſt minor maxima, quũ ſimiliter ſecabitur maxima, vt ſecta eſt T X, in V, & reliquum eius ſegmentum ſecabitur in partes continentes rectangulum ipſi V Z X rectangulo, æquale, erit vel illius maius ſegmentum, iſtius maiore, maius, vt quum maxima eſt tangens à puncto B, poteſt igitur inter minimę intereeptæ ſegmentum à puncto B in ſemicirculum C.

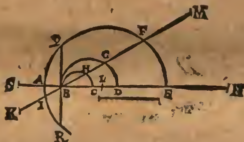
K D, & eundem circulum tangentem ab eodem pũ-ꝺto, intercipi recta eidem maiori ſegmento rectæ intercipiendæ æqualis, intercipiatur, & producatur in circumferentiam circuli A E R B, qualis recta Q B R & oſtendetur recta Q B R ipſi T X. ęqualis, eodem modo quo iam oſtenſum eſt rectam F E, eſſe minimam. vel erit minus ſegmentum rectæ V X minus quidem recta O, at maius minore ſegmento maximæ, & tunc ſi A C maxima fuerit, poterit dictum minus ſegmẽtum rectę V X, intercipi inter rectas B F, B C, intercipiatur producaturque in circumferentiam A E R B, & oſtendetur eodem quo prius modo, recta ſic intercepta ipſi P X æqualis: intercepta itaque eſt recta data, quod erat faciendum.

CONSECTARIVM.

HInc ſequitur ſi huiuſmodi recta quæ intercipi poſſit fuerit minor vtraque ipſarum AC, & tãgente circumferentiam C K D à B puncto, poſſe duobus modis eam intercipi, priori ſi maius extremum intercipiatur inter tangentem & B F, altero ſi minus extremum intercipiatur inter B F & B C, eſt igitur hic caſus διπαθής, quod animaduertiſſe fuerit operę pretium.

Eadem methodo oſtẽdemus & determinationem quam paginis viceſima tertiâ, & viceſima quarta, mei libelli ego adhibui, pro inſtituta mihi zeteſi ſufficiẽtem eſſe & legittimam, atque adeo vel leui adhibito examine, Geometricè maximum & minimum in li-

neis, inde definiri posse, quemadmodum iam à nobis in hoc superiori casu præstitum est. sed ne nobilissimæ huius scientiæ studiosis vllo modo desimus age experiamur, & repetatur figura paginæ vicesimæ tertiæ, sintque semicirculi quales illic requiruntur A F E, B G D, & fiant æquales A C, D E, adeoque & reliqua construantur prout illic præscriptum est.



Analogismus ordinatus ex illic firmata zetesi fuit, differentiam rectangulorum I H vel F G in compositam ex B D, B C, & B D in I B, esse ad rectangulum A B in B E vt recta B C ad rectam I B: vnde determinationem elicuimus vt sequitur.

Hinc ipsi B D applicatis rectangulis G F *in compositam ex B D, B C, & A B in B E, oportet latitudinem priorem, non minorem esse dupla recta quæ potest rectangulum ex latitudine posteriore, in rectam B C, tum altera extremarum non minore ipsa A B, nec maiore mediâ proportionali inter A* B, B E, *sublata ex recta data, reliquum segmentum ipsa* B C *maius esse non debet, alioqui recta data interponi non potest, vt ex demonstratis liquet.*

Hinc ipsi B D applicatis rectangulis.

Fiat applicatio vt suprà, tribus scilicet datis inueniendo quartam proportionalem, & sit primum vt B D ad compositam ex B D, B C ita I H vel G F, ad aliam, quæ sit æqualis compositæ ex I H, I K, eritq; ea latitudo ex prima applicatione. sit secundò vt B D ad B E, ita A B ad aliam quæ sit A L, tum inter A L & B C media sit proportionalis O. ex primo nostro lẽmate erit rectangulum sub L B & composita ex I K, B H, æquale rectangulo sub A L, B C, siue quadrato ipsius O. atque ita καθόλου de quibusuis alijs interceptis, similiterque auctis, id est, si fuerit tota intercepta ad adiectam ipsi I K similem, vt B D ad B C. (nam quoniam est vt B D ad compositam ex B D, B C ita I H ad compositam ex I H & I k, erit & diuidẽdo vt BD ad B C ita I H ad I k.) erunt rectangula sub similibus segmẽtis, ipsi O quadrato, vel rectangulo sub A L, B C æqualia: segmentaque inter B punctum & circumferentiam A I R erunt extrema proportionalium, seu alterum latus rectangulorum æqualium.

Oportet latitudinem priorem.

Latitudo prior erat composita ex I H, I k, latitudo posterior A L, rectangulum verò sub A L, B C, positũ est æquale quadrato O, & quoniam O quadratum semper est æquale rectangulo sub I B & compositâ ex k I, B H, (vt ex zetesi constat.) non potest recta k H minor esse dupla ipsius O. hinc sequitur ipsius O duplam multatam segmento simili ipsi I k, id est si diuidatur ipsius O dupla, pro ratione B C ad B D partem ipsi B D similem esse omnium interceptarum minimam. data

autem

autem minima, maxima erit quæ ab ea fuerit remotissima in vtramuis partem, vt post ostendetur.

Tum altera extremarum.

Quoniam enim recta inter B punctum & circumferentiam A I R, est semper altera coëfficientium, non potest ea aut minor esse recta A B, aut maior recta tangente Q B vel BR hoc autem segmento sublato ex recta intercipienda, eius reliqua pars debet inscribi circulo B H C; quare rectâ B C maior esse non potest, alioqui dictam rectam inscribi impossibile est. atque ita à me determinatum est problema: & ex facto parabolismo statim prodit minima, a quâ remotior ab vtrauis parte semper propinquiore maior est, & remotissima maxima. hoc vt minutius & per partes ostendamus, longiore opus est examine, quod tamen inire non grauabor.

Quoniam igitur est vt B D ad B E, itâ A B ad A L, erit rectangulum sub BD, A L rectangulo sub B E, A B id est quadrato rectæ tangentis circulum B G D in B puncto, & in circumferentia A F E terminatæ æquale, sit ea tangens Q B vel B R. Iam si B C, B D æquales fuerint, erit recta O dictæ tangenti æqualis, quã vltimam statuimus interceptarum inter dictas circumferentias & ad B punctum pertinentium versus A partes. (aliæ si quidem factione Geometrica non indigent) si non sunt æquales sit B C minor quam BD, eritque quadratum O, quadrato dictæ tangentis minus, aut igitur B C ipsa A B minor, aut non minor erit: sit primum non minor, & vel maior vel æqualis: quoniam igitur B C ponitur non minor,

ipsa A B, & A L ex constructione eadem A B maior, erit rectangulum sub A L, B C id est O quadratum, quadrato A B maius, & proinde recta O maior ipsa A B, atqui B C posita est minor recta B D, ergo ex demõstratis erit idẽ O quadratũ, B Q quadrato minus, & recta O, rectâ B Q, siue B R minor: inter pũcta igitur A, R, interponatur recta B I, ipsi O æqualis producaturq; I B in F, secãs circulos B H C, B G D in punctis H, G, & circulũ A Q F in pũctis I, F, dico rectã, G F (cui æqualis est I H, vt à nobis in huius casus Zetetico ostensum est.) esse minimam omnium quæ dictis circumferentiis B G D, Q F E, intercipi, & ad punctum B pertinere possunt. fiat enim vt B D ad B C, ita H I ad I K, sitque alia quæuis interposita vt D E vel A C, & fiat vt B D ad B C, ita C A ad AS, & quoniam tota C S tota k H maior est, (est enim B A minor extremarum, & composita ex S A, B C maior, & B I media, cuius duplæ æqualis est K H vt ostensum est.) & tota C S ad partem S A, vt H K ad K I, & permutando C S ad H K, vt S A ad k I, est autem CS ipsa H K maior, ergo & S A ipsa k I maior erit. sed est S A ad A C, vt K I ad I H, & S A ad K I vt A C ad I H, at S A ipsa k I maior, ergo & A C ipsa I H maior erit. atque ita de quibusuis alijs sic interceptis ostendetur semper recta G F minor, adeoque omnium minima. ab eaque remotiorem, propinquiore maiorem, vt in superiori demonstratione processum est. & si quidem B R, B I, B A, proportionales fuerint, vtramq; D E, Q B, æquales & maximas esse: sin autem ipsis B R, B I, tertia proportionalis, maior fuerit ipsa B A,

erit D E maxima, si minor, erit maxima B Q, eâdem prorsus methodo quâ in superiori determinatione vsi sumus.

Sit iam B C minor ipsa A B, aut igitur in hoc casu O recta ipsa A B maior erit, aut non maior, si maior, dabitur minima vt supra, si non maior aut igitur æqualis aut minor: & in vtroque casu D E; interceptarum omnium erit minima, Nam quum æqualis fuerit ostendetur eodem prorsus modo, quo supra rectam A C vel D E, esse omnium minimam, sin minor fuerit, erit B A maior extremarum, composita vero ex S A, B C, minor & proinde reliquę vt B I, B R extremæ maiores, eruntque in hoc casu quoque I H, B R, &c. maiores ipsa C A, maximaque & remotissima B R. at B C existente ipsi B D æquali erit B Q omnium minima, ac proinde & D E maxima, Quod si contingat B C maiorem esse quam B D, id est si oblâtis semicirculis A F E, B H C, sumantur C E, A D, æquales & iubeatur interponi recta quæuis qualis est H F, erit in hoc casu, vt differentia rectangulorũ I G vel H F, in compositam ex B D, B C, & B C, in B I. ad A B in B E, ita B D ad B L, hoc autem obiter ostendamus.

Ex rectangulo enim sub cõpôsita ex B D, B C, in I G, si auferatur rectangulum B C in B I, reliqua erunt rectangula B D in I G, & B C in B G, est autem B C in B G æquale ipsi B D in B H, (est namque B D ad B G, vt B C ad B H) & est I G æqualis ipsi H F, (sumptæ sunt enim A D, C E ęquales.) eruntitaque B D in I G & B C in B G, hoc est B D in B H æqualia ipsi B D in B F,

est autem B D in B F, ad A B in B E, hoc est B F in B I vt B D, ad B I, ergo differentia rectangulorum I G vel H F in compositam ex B D, B C, & B C, in B I est ad A B in B E, vt B D ad B I, quod erat demonstrandum.

Applicentur omnia ipsi B C, id est fiat vt B C ad compositam ex B D, B C ita H F vel I G ad aliã, quæ sit I M, deinde vt B C ad B E, ita A B ad aliam nempe A L & rectangulo sub A L in B D, æquale fiat quadratum O. tum ita diuidatur prior latitudo I M, vt inter eius partes, media sit proportionalis O, erit ex sępius citato lemmate nostro, altera extremarum ęqualis segmento rectæ intercipiendæ a puncto B in circumferentiam. A I R. atque hinc facile determinabitur maxima & minima: quoniam enim rectangulum sub B C, A L, rectangulo sub B E, A B, hoc est quadrato Q B est æquale, rectangulum vero A L in B D, ipsi O quadrato, & ponitur B C (in hoc casu) minor ipsa B D, erit Q B quadratum ipsius O quadrato minus, & propterea Q B ipsa O minor. est autẽ vt cõposita ex B D, B C ad B C, ita I M ad I G ex cõstructione, erit & diuidendo, vt B D ad B C, ita G M ad G I, sit iam ipsi O quadrato æquale rectangulum A B N, erit igitur (ex iam firmata zetesi:) vt composita ex B D, B C, ad B C, ita A N ad A D, & propterea vt B D ad B C, ita D N ad A D: erat autem vt B D ad B C, ita G M ad I G, ergo vt G M ad I G, ita D N ad A D & componendo, tota L M ad I G, vt A N ad A D: & permutando, I M ad A N vt I G ad A D est autem I M minor ipsa A N, (quatuor si quidem

dem proportionalium A B, I B, B M, B N, eſt A B, minima, & proinde B N maxima, ac propterea compoſita ex A B, BN maior compoſita ex I B, B M.) ergo & I G vel H F ipſa A D, hoc eſt C E minor erit. atque ita oſtendetur A D, ſiue C E quâuis aliâ ſic interpoſita maior, adeoque interceptarum omnium in eo caſu maxima, & Q B minima.

Quæ ſymptomata licet ſupra expoſitâ methodo acurate inueſtigare. Ego ne actum agere videar ἐξηγητὴν hic amplius non ago, illud ſuperiori exemplo præſtiti in ſtudioſorum bonum, vt vel huius exẽpli facilitate capti, Analyticem pro omni τόπῳ ἀναλυομένῳ, ad quoduis propoſitum ſiue examinandum, ſiue inueſtigandum amplectantur.

Atque hinc videre eſt, quicquid difficile aut arduum in hac determinatione, analytica noſtra methodo facile ſuperari, & viam in hac arte vel mediocriter exercitato, ſatis peruiã. ego vero ζητητὴν prius ſolum egi non ἐξηγητὴν: & caſus illos ζητητικῶς determinaui, quam autem facilis ſit à zeteſi ad exegeſim ποριστικῶς regreſſus, diſcant vel hinc qui volent. At ego alios caſus aliter determinaui ? fateor: poteram & quidem meo iure, ſolius æquationis reſtrictione cõtentus, (quemadmodum iſthic factum eſt) illas determinationes miſſas facere: at quoniam vel ſola inſpectione obuiæ, (data quippe ex ipſo σχηματισμῷ maxima vel minima ſola opus habebat declaratione quam ego illic adhibui, abſque vllo æquationis ad exegeſin examine.) hæ non ita, ſed diffuſiore πορισμῷ quærenda & inuenienda minima, vt iam

oſtenſum eſt, (quod quidem inſtituti mei non erat.) illas inſerere, has omittere placuit. non igitur operis difficultatem (perexigua ſiquidem ea eſt.) aut arduã inuentionem diffugiens, ſed inſtituti mei rationem ſequutus, caſus illos hoc modo, poſſibili & impoſſibili demonſtrato, exhibitaque implicite minima, [quam explicare ad me tunc non attinebat] determinaui.

Hæc quidem tecum liberius, (vir mihi multũ colende) et quia in re mathematica iure tuo ac merito primas hodie obtinuiſti, libentius: quin et comitas illa tua, quam profuſe adeo expertus eſt conciuis & familiaris meus Georgius Strachanus, quem hoſpitem apud te humaniſſime excepiſti, quod ſuis ad me literis certum fecit, tum amor erga me tuus quem publicè teſtari non dedignaris, liberiorem me reddidere, certaque ſpe mihi pectus firmarunt, quicquid ſpectat ad ſtudiorum communionem tibi acceptum fore & gratum: quam ſi foues et me amare pergis.

Sublimi feriam ſydera vertice.

Lutetiæ Pariſiorum Pridie I D. Octob. Anno 1615.